

Colofon

Aan deze uitgave werkten mee:
Cathryn Hollin, Philips Jet-Net
Hans Sterk, Technische Universiteit Eindhoven

Teksten:
Betty Majoor, In Profiel Tekstontwerp

Vormgeving:
de Vormers, Utrecht

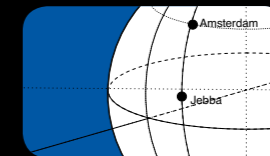
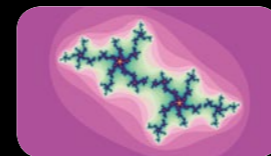
Drukwerk:
Veenman Drukkers, Rotterdam

Eindredactie:
Sophie Krabbenbos, Jet-Net coördinatiebureau



Redactieadres

Jet-Net Coördinatiebureau
Lange Voorhout 20
Postbus 556
2501 CN Den Haag
T 070 311 97 19
Website: www.jet-net.nl
E-mail: info@jet-net.nl



Wisactueel

Magazine voor docenten over de relatie tussen wiskunde in het voortgezet onderwijs en toegepaste wiskunde in bedrijven.

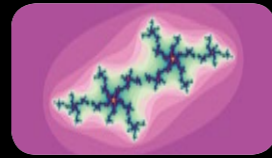
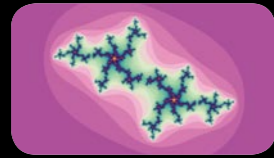
Wisactueel is een uitgave van Jet-Net, het Jongeren en Technologie Netwerk Nederland. In Jet-Net werken ruim 25 Nederlandse bedrijven samen met zo'n 130 havo/vwo-scholen met het doel de scholieren beter zicht te bieden op de praktijk en op de beroepsmogelijkheden in industrie en technologie. Jet-Net wil hiermee meer scholieren interesseren voor een hogere bètatechnische vervolgopleiding.

Wisactueel richt zich op wiskundedocenten in het voortgezet onderwijs en is bedoeld om een relatie te leggen tussen de lesstof en de toepassing van wiskunde in het bedrijfsleven. Wisactueel geeft illustraties van wiskundetoepassingen in bedrijven en van Jet-Net activiteiten waarbij leerlingen in contact komen met wiskundigen.

In deze editie komt u meer te weten over beveiligingsalgoritmes bij het Ministerie van Binnenlandse Zaken, krijgt u zicht op de verkeerspatronen op het internet en ziet u hoe bij een Jet-Net activiteit theorie en praktijk worden gecombineerd. Daarnaast worden opdrachten met betrekking tot onze aardbol aangereikt.

Ingenieur@School

Onderdeel van Jet-Net is het Ingenieur@School netwerk. Bij dit project zijn 220 ingenieurs aangesloten die hebben aangegeven scholen te willen helpen om de relatie te leggen tussen theorie en praktijk. Dat wordt gedaan middels gastlessen, profielwerkstukbegeleiding of een werkbezoek. Er zijn ook verscheidene wiskundigen bij het project betrokken. Bent u ook geïnteresseerd om deel te nemen aan het project? Kijk dan op de Jet-Net website (www.jet-net.nl) in de Ingenieur@School database of er ingenieurs zijn die aan uw vraag voldoen.



Flitsend internet door wiskunde van kleine kansen

“E-mail is de zegening en plaag van deze tijd.”, aldus Michel Mandjes in zijn intreerede op 2 februari j.l. Als hoogleraar aan de Universiteit van Amsterdam en als deelnemer in vele projecten verkent hij de mogelijkheden van de toegepaste kansrekening. Door de zegeningen van e-mail kan hij intensief samenwerken met mensen over de hele wereld. De plaag van e-mail en internet, zoals lange wachttijden en de overbelasting van netwerken, is daarbij onderwerp van onderzoek.



Mooie eigenschappen

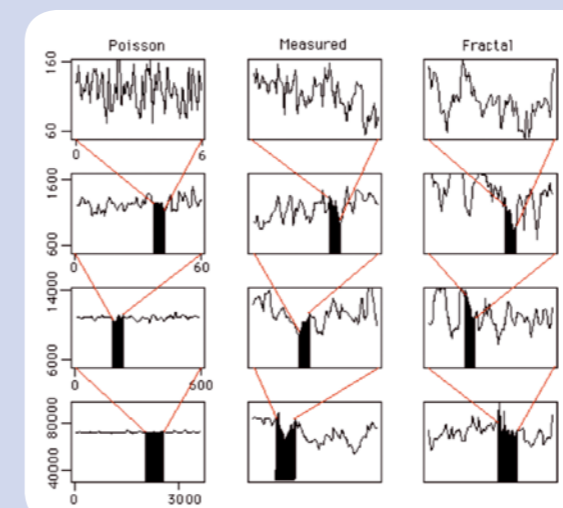
Al op de middelbare school had Michel Mandjes oog voor de mooie kanten van wiskunde. “Vooral het abstracte van wiskunde sprak mij aan. Soms zagen dingen er enorm moeilijk uit. Door ze te abstraheren, bleken ze ineens een stuk makkelijker te zijn. Vooral het fundamentele sprak mij aan: mooie symmetrieën, elegante oplossingen. Later kreeg ik ook meer oog voor de toepassingsmogelijkheden van wiskunde.”

Een vak met perspectief

“Toen ik in 1988 mijn middelbare school afrondde, werd me sterk aangeraden een studie te kiezen met goede perspectieven op de arbeidsmarkt. Van wiskunde had ik de indruk dat het vooral fundamenteel georiënteerd was en je dus niet voorbereidde op een interessante baan. Mijn keuze viel toen op econometrie, een studie met veel wiskunde, maar ook toepassingen. Na één jaar ben ik naast econometrie ook wiskunde gaan studeren. Dat kon vrij makkelijk omdat er veel overlap tussen de twee studies bleek te zijn. Mijn specialisatie in de toegepaste kansrekening en besliskunde, ligt op het grensvlak van de econometrie en de wiskunde. Typische besliskundige problemen gaan over de optimalisering van de inzet van schaarse middelen, zoals voorraadmanagement, roostering en routing.”

Wachttijden op het internet

“Tijdens mijn promotie heb ik me verdiept in toepassingen van kansrekening rondom het afhandelen van dataverkeer in telecommunicatienetwerken. Bij zulke netwerken bepalen uitzonderingen (calamiteiten) vaak de kwaliteit van een systeem. Internetten tijdens piekuren, bijvoorbeeld, kan heel frustrerend zijn. Het is dus van belang dat je je netwerk optimaal inricht. En dat vraagt er om dat je de waarschijnlijkheid van extreme wachttijden in kaart brengt. Ook komt er steeds meer inzicht in het grillige verloop van dataverkeer. Oorspronkelijk werd er veel gebruik gemaakt van traditionele modellen, zoals het model dat ervan uitgaat dat datastromen lijken op zogenaamde



Poissonstroom

‘Poissonstromen’. Inmiddels hebben uitgebreide meetstudies uitgewezen dat zo'n model veel te simplistisch is, en dat een meer geavanceerde beschrijving gebruikt moet worden. Daarbij is het heel interessant dat die beschrijving een fractale structuur heeft.

De figuur in de vorige kolom laat zien hoe een Poissonstroom (linkerkolom) bij een steeds grotere tijdsinterval in een steeds gladder verkeerspatroon resulteert. De gemeten verkeersstroom is echter veel grilliger (midden). Het maakt niet uit in welke tijdsschaal je een fragment bekijkt, het patroon blijft er hetzelfde uitzien. Deze self-similarity zie je ook bij fractale modellen (rechts). De prachtige plaatjes die je met fractale modellen kunt maken, laten ook iets van de ‘kunstzinnigheid’ van wiskunde zien.”

Een gevarieerd bestaan

“Mijn activiteiten sinds mijn studie tonen aan hoe misplaatst de opvattingen waren over de perspectieven, of het gebrek daaraan, na een wiskundestudie. Het is zelfs een zeer gevarieerd bestaan. Tijdens mijn promotieonderzoek bij KPN Research was internet een hype en het was enorm leuk te onderzoeken hoe de benodigde infrastructuur kon worden geoptimaliseerd. Na mijn promotie heb ik twee jaar in Amerika gewerkt. Daar heb ik bij Bell Labs met een aantal groten der aarde onderzoek gedaan aan praktische, maar ook fundamentele problemen. Terug in Nederland kon ik aan de slag bij het Centrum voor Wiskunde en Informatica en tegelijkertijd als deeltijdhoogleraar bij de UT in Enschede. Via allerlei projecten heb ik samengewerkt met bedrijven als TNO, KPN, Lucent en Philips en sinds 2004 ben ik hoogleraar toegepaste kansrekening aan de Universiteit van Amsterdam. Ik zoek steeds nieuwe uitdagingen. Momenteel onderzoek ik of de kansrekening die ik heb gebruikt voor toepassingen in de telecommunicatie, ook toegepast kan worden op problemen in de financiële wereld of uit de biomedische hoek. Wiskunde is een veelzijdig vak: je bouwt een soort algemene gereedschapskist op, die je kunt gebruiken voor allerlei doeleinden.”

Wiskundig talent

“Ik zie nu al een aantal jaren wiskundestudenten voorbijkomen, en het lijkt te kloppen dat hun gemiddelde niveau afneemt. Toch zitten er elk jaar weer een aantal getalenteerde studenten bij. Dat is niet veranderd ten opzichte van vorige jaren. Wel is duidelijk dat wiskunde - en andere exacte vakken - minder populair zijn bij scholieren en we hebben dus te weinig eerstejaars. Heel jammer, denk ik, want ik ben ervan overtuigd dat dat vooral voortkomt uit onbekendheid met het vak en de studie. Het kan leerlingen aanspreken als je laat zien waar je wiskunde zoal voor kunt gebruiken. Toch is een verdere popularisering van wiskundeonderwijs niet alleen zaligmakend. Er zijn ook veel studenten die de schoonheid en het systematische van wiskunde waarderen. Een betere aansluiting bij de toepassing is dus prima, maar blijf ook aandacht houden voor leerlingen die zich interesseren voor de generieke aanpak van abstracte vraagstukken.”

Studenten Martinus College weten waar zij staan

Twee jaar geleden onderzochten het Martinus College in Grootebroek en de Koninklijke Marine in Den Helder wat zij in het kader van Jet-Net samen konden gaan doen. Rond dezelfde tijd verkende het HAVO-team de mogelijkheden om meer aan vakoverstijgend onderwijs te doen. 1 + 1 was 2 en resulteerde in het project 'Waar ben ik?' voor 4 HAVO. Dit jaar is het project aan zijn derde editie toe.

1 project, 4 vakken

In 'Waar ben ik?' draait alles om plaatsbepaling. In vier dagdelen benaderen de vakken wiskunde, natuurkunde, biologie en lichamelijke opvoeding dit thema vanuit hun eigen invalshoek. Het is een gevarieerd programma. Het vak biologie staat stil bij de rol van de zintuigen bij het bepalen van je plaats in de ruimte. Bij natuurkunde gebruiken leerlingen zelfgebouwde instrumenten om hun positie te bepalen (leerlingen met een NG profiel iken een Jacobsstaf, leerlingen met een NT profiel bouwen een sextant). Het programma van lichamelijke oefening vindt plaats in het buurtbos, waar opdrachten worden uitgevoerd met behulp van GPS, stafkaart, mobiele telefoon, enz. Het wiskundeonderdeel bestaat uit een praktische opdracht waarbij leerlingen leren hoe ze de afstand tussen twee plaatsen op de aardbol kunnen berekenen.

Navigeren: theorie en praktijk

Het project wordt afgetrapt door een docent navigatie van de Marine. Hij geeft een college over plaatsbepaling op zee. Daarin passeren begrippen als meridiaan, meridiaansdoorgang, declinatie van de zon en poolhoogte de revue. Daarna legt een sergeant van het Korps Mariniers uit hoe je werkt met kaart en kompas. Later in het project kunnen de leerlingen het geleerde in de praktijk brengen. Tijdens een bezoek aan de Marinebasis in Den Helder mogen ze zelf een brugsimulator bemannen en staan ze aan het roer van een 'echt' fregat. Ook brengen ze een bezoek aan het Marine museum. De navigatieoefeningen in het bos worden mede begeleid door de sergeant.



Hoog gewaardeerd

In de weken voor het project, bereiden de leerlingen een aantal dingen voor. Per vak wordt vervolgens één afsluitend dagdeel aan het project gewerkt. Deze werkvorm slaat goed aan. De leerlingen vinden het prettig om wat langer achter elkaar aan één vak te werken. Het is wel doorwerken geblazen, want aan het eind van het dagdeel wordt het vak meteen afgerond. Omdat het project aan het eind van het jaar plaatsvindt, hebben leerlingen met andere profielen soms al vrij. Dat blijkt geen enkel probleem. De deelnemende leerlingen vinden het project zo leuk, dat ze zonder mopperen met een GPS door het bos sjouwen, terwijl hun vrienden in zwembroek of bikini bij het naburige meertje liggen.

Investering en opbrengsten

Natuurlijk komt een project van deze omvang niet uit de lucht vallen. Drie docenten uit de wis- en natuurkundesecties hebben samen hard aan de eerste projectopzet gewerkt. Later is ook de sectie biologie aangehaakt. Jaarlijks besteedt een coördinerend docent een aantal uur om afspraken vast te leggen met de school en de Marine. Per jaar doen er zo'n 35 leerlingen mee. Ze zijn erg enthousiast over het project. Bij wiskunde vinden ze het leuk dat ze een keer zien wat je er in de 'gewone' wereld mee kunt. Er is zelfs een groeiende belangstelling voor profielwerkstukken met wiskunde. Leuk om te vermelden is, dat dit jaar het project ook is uitgevoerd door het Petrus Canisius College in Alkmaar. Al met al een mooie opbrengst.

Met dank aan Jaap Bosschaart, Kees de Boer, Cathy Baars en Wim Teunissen van het Martinus College voor het beschikbaar stellen van hun projectmateriaal en hun toelichting daarbij.

Slimme codes en sleutels ter beveiliging van staatsgeheime informatie



Eigenlijk wilde Karin Poels van jongs af aan, net als haar vader, huisarts worden. Het werd een wiskundestudie. Nu ontwikkelt ze bij het Ministerie van Binnenlandse Zaken beveiligingsalgoritmes voor staatsgeheime informatie. Een fantastische baan voor iemand die van puzzelen houdt.

Iets met veel wiskunde

"Op de middelbare school vond ik wiskunde het leukste vak. Ik vond het toen al een uitdaging en heel leuk om net zo lang aan een wiskundig probleem te rekenen en te puzzelen totdat de oplossing gevonden was. Zeker bij moeilijkere problemen geeft dat echt een kick. Als je je inschrijft voor een medicijnenstudie, moet je een tweede studiekeuze aangeven. Tijdens mijn oriëntatie op die tweede studie merkte ik dat ik iets zocht met veel wiskunde en dat geneeskunde dus eigenlijk minder geschikt was. Uiteindelijk was ik blij toen ik voor geneeskunde werd uitgeloot en met veel enthousiasme en nieuwsgierigheid kon beginnen met technische wiskunde aan de TU in Eindhoven."

Geheime codes

"Ik heb me gespecialiseerd in coderingstheorie en cryptologie. Coderingstheorie richt zich op het ontwikkelen van codes die fouten

kunnen verbeteren. Bij een kras op een cd zonder codering gaat er veel informatie verloren. Door je data slim te coderen, kan een foutverbeterende code het originele signaal weer reconstrueren. Cryptologie legt zich toe op de beveiliging van data. Daarbij zet je informatie om in een voor anderen onleesbare code. Dit wordt toegepast in allerlei situaties waar vertrouwelijke data worden verstuurd zoals bij banken en internet. Hoe beter je de data wilt beveiligen, des te slimmere vercijferalgoritmes je moet maken. Hier ligt een grote wiskundige uitdaging."

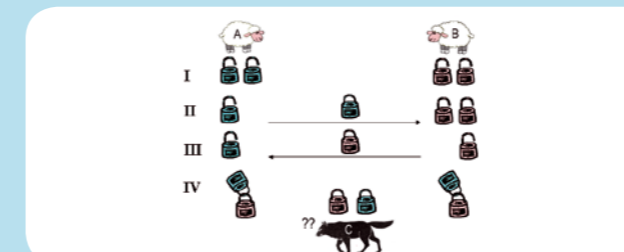
Sleutels

"Je kunt informatiebits zo 'door elkaar gooien', dat niemand er ooit nog iets zinnigs van kan maken. Een vercijferalgoritme, gecombineerd met een geheime sleutel, bepaalt hoe de bits gehusseld worden. Het is dus noodzakelijk dat de verzender en de ontvanger van het bericht deze

[vervolg pagina 6](#)

Het Diffie-Hellman protocol

Het Diffie-Hellman protocol is een methode waarmee twee partijen een geheime sleutel kunnen afspreken over een publieke (openbare) verbinding. Hiervoor hoeven ze dus niet fysiek bij elkaar te komen. Het protocol maakt gebruik van een wiskundige functie die zo ontworpen is dat het gemakkelijk is de functie in een punt te evalueren, maar praktisch onmogelijk om bij een gegeven functiewaarde het punt te berekenen dat deze functiewaarde oplevert. Om het protocol te beschrijven visualiseren we de functie met een open slot dat heel makkelijk te sluiten is maar, eenmaal gesloten, onmogelijk weer open te maken. Merk op dat het slot geen sleutelgat heeft; eenmaal gesloten mag het niet mogelijk zijn het weer open te maken.



A en B willen een geheime sleutel afspreken over een publieke verbinding. Een indringer (C) luistert de verbinding af en probeert de afgesproken sleutel te achterhalen.

- I:** A en B hebben ieder twee identieke open sloten.
- II:** A sluit een van zijn sloten en stuurt het gesloten slot naar B over de publieke verbinding.
- III:** B sluit een van zijn sloten en stuurt het gesloten slot naar A over de publieke verbinding.
- IV:** A haakt zijn open slot om het gesloten slot van B en sluit het open slot. B haakt zijn open slot om het gesloten slot van A en sluit het open slot.

A en B hebben nu allebei een slotcombinatie die alleen zij kunnen maken; een indringer moet tenminste één open slot kennen om de geheime slotcombinatie te maken. C ziet alleen beide gesloten sloten maar kan deze niet openen; hij is niet in staat de geheime slotcombinatie te maken. In het echte protocol is de geheime sleutel een lange reeks bits die alleen A en B kennen. C zag bits over en weer gaan maar kan hieruit de geheime sleutel niet construeren. A en B kunnen nu de geheime sleutel gebruiken om informatie m.b.v. een vercijferalgoritme te vercijferen.

Een reis om de wereld in 12 vragen

vervolg pagina 5

geheime sleutel delen. De zender gebruikt de sleutel om een bericht te versleutelen. De ontvanger gebruikt dezelfde sleutel voor de reconstructie (ontcijfering) van het bericht. Bij goed gebruik van een veilig algoritme bepaalt de sleutellengte hoe lang een indringer er over doet om de sleutel te kraken. Een heel lange sleutel vertraagt weliswaar het versleutelen, maar zorgt er wel voor dat een indringer, gegeven de huidige technologie, zeg 100 jaar nodig heeft om de sleutel te kraken.”

Staatsgeheimen

“Op het Ministerie van Binnenlandse Zaken rouleren allerlei soorten gevoelige informatie. Voor staatsgeheime informatie zijn sleutels nodig die ten minste 30 jaar stand houden terwijl dit voor minder gevoelige informatie korter mag zijn. Mijn afdeling is dus steeds op zoek naar slimme technieken om informatie te versleutelen. Er zijn geen standaard recepten. Elke soort informatie vraagt om een eigen manier van versleuteling, waarbij je rekening houdt met de mogelijke dreigingen en aanwezige kennis en middelen bij eventuele indringers. Tijdens mijn studie dacht ik dat toegepaste wiskunde en theoretische wiskunde erg veel op elkaar leken. Nu ik aan concrete problemen werk, merk ik dat ik heel praktisch ben opgeleid. Door een moeilijk probleem te reduceren tot een simpelere versie, krijg ik er snel vat op. Vervolgens kan ik stap voor stap op zoek naar de oplossing van het echte probleem.”

Volop mogelijkheden

“Wiskunde heeft veel kanten en is allesbehalve saai. Meteen na mijn afstuderen hebben mijn studiemaatje, Karin Rietjens, en ik elk een artikel op een conferentie gepresenteerd. In Australië dan wel. Dat was een prachtige afsluiting van mijn studie. Niet alleen de reis, maar ook het feit dat er beroemde wiskundigen in je publiek zaten. De keuze ná mijn opleiding vond ik eigenlijk moeilijker dan de keuze van de opleiding zelf. Er is zoveel mogelijk met een wiskundestudie. Ik werd al snel gevraagd om aan een Europees project mee te doen en een jaar later werd ik benaderd voor mijn huidige baan. Naast wiskundigen, werk ik veel samen met informatici en ik moet dus ook het een en ander van informatica weten. Hetzelfde geldt voor elektrotechniek omdat je met de (on)mogelijkheden van apparatuur te maken krijgt. Het maakt het vak er voor mij alleen maar leuker op.”

De wiskundeopdracht van het project ‘Waar ben ik?’ laat zien dat je prima kunt rekenen aan de afstand tussen twee plaatsen op de wereldbol.

Deze opdracht is geschreven voor leerlingen van 4 HAVO met een NG- en NT-profiel. Tijdens het project hadden de leerlingen 3 tot 4 uur nodig voor de onderstaande opdrachten. Voor het uitvoeren van de opdracht zijn een wereldbol en een meetlint of een stukje touw nodig.

1. De coördinaten van een punt op de aardbol

De positie van een plaats op aarde wordt door twee getallen bepaald: het aantal **lengtegraden** L en het aantal **breedtegraden** B. L varieert van 0 tot 180 graden oosterlengte en van 0 tot 180 graden westerlengte. B varieert van 0 tot 90 graden noorderbreedte en van 0 tot 90 graden zuiderbreedte. Geografische coördinaten van plaatsen zijn te vinden via de webpagina www.geografie.startpagina.nl, onder het kopje plaatsbepaling. De link ‘plaatsen met coördinaten’ brengt je op de pagina <http://www.astro.com/cgi/aq/cgi?&lang=e>. Voor plaatsen binnen Nederland is <http://www.ariesastro.nl/varia/plaatsen/coordinaten.asp> een bruikbare pagina. Beide pagina's zijn weliswaar van astrologische organisaties, maar voor ons doel zijn ze uitstekend bruikbaar.

Opdracht 1

Zoek voor jouw woonplaats L en B op. Benader L en B in twee decimalen nauwkeurig. Bedenk dat op een kaart in een atlas graden in **minuten** worden verdeeld. Hierbij is 1 graad gelijk aan 60 minuten, dus 15 minuten = 0,25 graden, enz. Zoek ook voor Amsterdam, Jebba (Nigeria) en Irkutsk (Rusland) de waarden van L en B op.

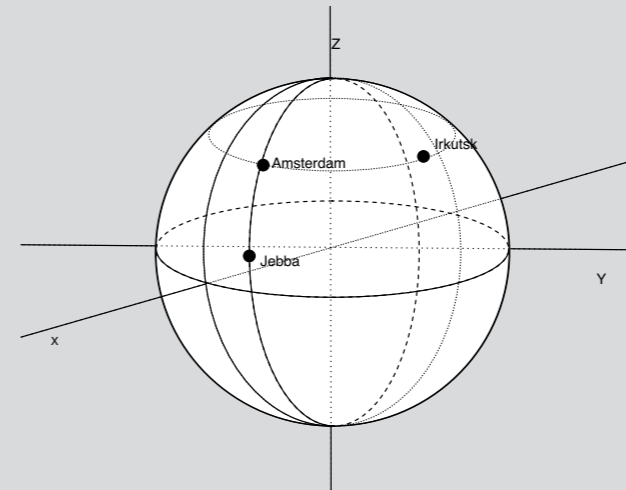
Wanneer we de aardbol in een ruimtelijk assenstelsel leggen waarbij de evenaar in het Oxy-vlak ligt en de noord- en zuidpool op de z-as liggen, dan heeft elke plaats op aarde drie coördinaten:

$$\begin{aligned}x &= R \cos(B) \cos(L) \\y &= R \cos(B) \sin(L) \\z &= R \sin(B)\end{aligned}$$

Zie de wereldbol.

Hierin is R de straal van de aarde. Neem hiervoor **R = 6378 km**.

Verder spreken we af dat L wordt uitgedrukt in graden oosterlengte, zodat bijvoorbeeld 50 graden westerlengte L de waarde -50 geeft. B wordt uitgedrukt in graden noorderbreedte, zodat bijvoorbeeld 20 graden zuiderbreedte B de waarde -20 geeft. Let erop dat je rekenmachine is ingesteld op graden i.p.v. radialen.



Opdracht 2

Bereken voor jouw woonplaats de drie coördinaten in twee decimalen nauwkeurig. Doe hetzelfde voor Amsterdam, Jebba en Irkutsk.

2. De afstand tussen twee punten langs een breedtecirkel

Alle punten met een gelijk aantal breedtegraden liggen op een **breedtecirkel**. De straal van de breedtecirkel bij B breedtegraden is $\text{straal} = R \cos(B)$

Opdracht 3

Toon deze formule aan. Maak daarbij een duidelijke tekening.

Wanneer twee plaatsen met lengtes L_1 resp. L_2 ($L_2 > L_1$) op dezelfde breedtecirkel liggen, dan is hun afstand langs de breedtecirkel:

$$\text{afstand} = (L_2 - L_1) / 360 \cdot 2 \pi R \cos(B)$$

Opdracht 4

Toon deze formule aan. Maak weer een duidelijke tekening.

Is in deze formule $L_2 - L_1 > 180$ graden, vervang in de formule dan $L_2 - L_1$ door $360 - (L_2 - L_1)$.

Opdracht 5

Leg m.b.v. je tekening van de vorige opdracht uit wat hiervan de reden is.

Opdracht 6

Amsterdam en Irkutsk liggen ongeveer op dezelfde breedtecirkel. Bereken de afstand tussen deze twee plaatsen langs de breedtecirkel. Geef je antwoord in km en rond af op drie decimalen.

Opdracht 7

Amsterdam en Jebba liggen ongeveer op dezelfde **meridiaan (lengtecirkel)**. Bereken voor deze twee plaatsen de afstand in km langs de meridiaan.

3. De afstand tussen twee punten langs een grootcirkel

Opdracht 8

Laat met behulp van de globe en het meetlint zien dat er een kleinere afstand is tussen Amsterdam en Irkutsk dan de afstand die je in opdracht 6 gevonden hebt. Schrijf je uitleg op.

Opdracht 9

Laat met behulp van de globe en het meetlint zien dat er geen kleinere afstand is tussen Amsterdam en Jebba dan de afstand die je in opdracht 7 gevonden hebt. Schrijf je uitleg op.

De afstanden die je in opdracht 8 en 9 gemeten hebt hebben te maken met **grootcirkels** (ook wel grote cirkels geheten). Een **grootcirkel** over een bol is een cirkel met als middelpunt het middelpunt van de bol. Alle meridianen zijn grootcirkels. De breedtecirkels zijn in het algemeen geen grootcirkels.

Opdracht 10

Slechts één breedtecirkel is een grootcirkel. Welke breedtecirkel is dat?

Door twee willekeurige plaatsen op de bol - die niet recht tegenover elkaar liggen - gaat precies één grootcirkel.

Opdracht 11

Leg uit waarom dit zo is.

De kortste afstand tussen twee plaatsen op de bol is de afstand langs de grootcirkel. De berekening van deze afstand gaat als volgt. Noem de plaatsen A en B. De coördinaten van A zijn (x_A, y_A, z_A) en de coördinaten van B zijn (x_B, y_B, z_B) . M is het middelpunt van de bol. Noem hoek AMB: α . Nu geldt de volgende formule:

$$\cos(\alpha) = \frac{x_A \cdot x_B + y_A \cdot y_B + z_A \cdot z_B}{R^2}$$

De afstand tussen A en B langs de grootcirkel wordt nu als volgt berekend:

$$\text{afstand} = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi R$$

Opdracht 12

Bereken de afstand tussen Amsterdam en Irkutsk langs de grootcirkel. Geef je antwoord in km en rond af op drie decimalen. Vergelijk je antwoord met dat van opdracht 6. Hoe groot is het verschil in **meters** tussen beide afstanden?